JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 9, 53–60 (1973)

Existenzaussagen bei gewissen Approximations- und Einschliessungsproblemen in halbgeordneten linearen normierten Räumen

WILHELM SIPPEL

Institut für Angewandte Mathematik I der Universität Erlangen-Nürnberg, 852 Erlangen, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received July 15, 1971

1. EINLEITUNG

Es sei R ein linearer normierter Raum über dem Körper der reellen Zahlen. Die Norm des Elementes $x \in R$ werde mit $\| x \|$ bezeichnet. Da Verwechslungen nicht zu befürchten sind, wird für das Nullelement von R und für die Null der reellen Zahlen das gleiche Symbol 0 verwendet.

Gegeben seien weiter zwei Teilmengen W_1 und W_2 von R. Gesucht sind zwei Elemente $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$, deren Abstand minimal ist. Es soll also für beliebige Elemente $u_1 \in W_1$ und $u_2 \in W_2$

$$\| w_1 - w_2 \| \leqslant \| u_1 - u_2 \|$$

gelten.

Satz 1 nennt Bedingungen, unter denen eine Lösung dieser Aufgabe existiert. Diese Bedingungen ermöglichen es, den Satz auf Problemstellungen der einseitigen Approximation und der zweiseitigen Einschließung von Elementen aus R anzuwenden. Dabei wird vorausgesetzt, daß R zusätzlich halbgeordnet ist.

2. EIN ALLGEMEINER EXISTENZSATZ

Es sei R weiterhin ein linearer normierter Raum über dem Körper der reellen Zahlen.

DEFINITION 1. Eine Teilmenge K von R, die aus mindestens zwei Elementen besteht, heißt Kegel mit Scheitel in $r_0 \in R$, wenn K bei beliebigem nichtnegativem reellen λ mit r auch $r_0 + \lambda(r - r_0)$ enthält (vergl. [3, S. 186]).

SATZ 1. *Es sei U ein linearer normierter Raum von endlicher Dimension über dem Körper der reellen Zahlen. In U seien zwei abgeschlossene Kegel K_1 und K_2 mit gemeinsamem Scheitel $u_0 \in U$ gegeben. Es gelte $K_1 \cap K_2 = \{u_0\}$. Weiter seien W_1 und W_2 zwei abgeschlossene nichtleere Teilmengen von U mit*

$$W_1 \subset K_1 \qquad \textit{und} \qquad W_2 \subset K_2 .$$

Dann existieren Elemente $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$, so daß für alle $u_1 \in W_1$ und $u_2 \in W_2$

$$\| w_1 - w_2 \| \leqslant \| u_1 - u_2 \|$$

gilt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei angenommen, daß $u_0 = 0$ gilt.

Die folgenden Bezeichnungen werden verwendet. Für $\nu \in \{1, 2\}$ und $\rho \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} K_\nu{}^\rho &:= \{u : u \in K_\nu , \| u \| \leqslant \rho\}, \\ P_\nu{}^\rho &:= \{u : u \in K_\nu , \| u \| \geqslant \rho\} \quad \text{und} \\ W_\nu{}^\rho &:= \{u : u \in W_\nu , \| u \| \leqslant \rho\}. \end{aligned}$$

(α) $\rho > 0$ sei vorgegeben. Es soll gezeigt werden, daß Elemente $p_1 \in P_1{}^\rho$ und $p_2 \in P_2{}^\rho$ existieren, für die

$$\| p_1 - p_2 \| = \min\{\| u_1 - u_2 \| : u_1 \in P_1{}^\rho, u_2 \in P_2{}^\rho\} \tag{1}$$

gilt. Zunächst erhält man

$$\begin{aligned} &\inf\{\| u_1 - u_2 \| : u_1 \in P_1{}^\rho, u_2 \in P_2{}^\rho\} \\ &\quad = \inf\{\| u_1 - u_2 \| : u_1 \in P_1{}^\rho, u_2 \in P_2{}^\rho, \min\{\| u_1 \|, \| u_2 \|\} = \rho\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Gegeben seien nun $y_1 \in P_1{}^\rho$ und $y_2 \in P_2{}^\rho$ mit

$$\min\{\| y_1 \|, \| y_2 \|\} = \rho \qquad \text{und} \qquad \max\{\| y_1 \|, \| y_2 \|\} > 3\rho.$$

Es gelte etwa $\| y_1 \| > 3\rho$ und $\| y_2 \| = \rho$. Dann existieren $\bar{y}_1 \in P_1{}^\rho$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 3$, so daß $y_1 = \lambda \bar{y}_1$ und $\| \bar{y}_1 \| = \rho$ erfüllt ist. Es folgt

$$\| y_1 - y_2 \| \geqslant \lambda \| \bar{y}_1 \| - \| y_2 \| = ((\lambda - 1)/2)(\| \bar{y}_1 \| + \| y_2 \|) > \| \bar{y}_1 - y_2 \|.$$

Mit (2) ergibt sich deshalb, wenn man noch $\mu := 3\rho$ setzt,

$$\begin{aligned} &\inf\{\| u_1 - u_2 \| : u_1 \in P_1{}^\rho, u_2 \in P_2{}^\rho\} \\ &\quad = \inf\{\| u_1 - u_2 \| : u_1 \in P_1{}^\rho \cap K_1{}^\mu, u_2 \in P_2{}^\rho \cap K_2{}^\mu\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Da die Menge $D := \{u_1 - u_2 : u_1 \in P_1^\rho \cap K_1^\mu, u_2 \in P_2^\rho \cap K_2^\mu\}$ kompakt ist, gibt es $d_0 \in D$ mit $\| d_0 \| = \min\{\| d \| : d \in D\}$. Deshalb existieren nach (3) Elemente $p_1 \in P_1^\rho$ und $p_2 \in P_2^\rho$, die (1) erfüllen.

Wir setzen nun

$$b_\rho := \min\{\| u_1 - u_2 \| : u_1 \in P_1^\rho, u_2 \in P_2^\rho\}. \tag{4}$$

Es sei vermerkt, daß für $\sigma, \rho > 0$

$$b_\sigma = (\sigma/\rho)\, b_\rho \tag{5}$$

gilt.

(β) Wir nehmen nun an, daß die Aussage von Satz 1 falsch ist, daß also für je zwei Elemente $y_1 \in W_1$ und $y_2 \in W_2$

$$\| y_1 - y_2 \| > \inf\{\| u_1 - u_2 \| : u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\} \tag{6}$$

gilt.

Die zu Beginn des Beweises definierten Mengen W_1^ρ und W_2^ρ sind kompakt. Wählt man nun ρ so, daß $W_1^\rho \neq \varnothing$ und $W_2^\rho \neq \varnothing$ erfüllt ist, dann existiert die Zahl

$$h_\rho := \min\{\| u_1 - u_2 \| : u_1 \in W_1^\rho, u_2 \in W_2^\rho\}.$$

Für $\sigma > \rho$ ergibt sich

$$h_\sigma \leqslant h_\rho . \tag{7}$$

Es sei nun σ so groß, daß außer $\sigma > \rho$

$$b_\sigma > h_\rho \tag{8}$$

erfüllt ist. Das ist möglich, da $b_\rho \neq 0$ gilt und b_σ deshalb nach (5) beliebig groß werden kann. Schließlich sei τ eine reelle Zahl mit

$$\tau > h_\sigma + \sigma. \tag{9}$$

Wie in (7) erhält man

$$h_\tau \leqslant h_\sigma . \tag{10}$$

Die Elemente $y_1 \in W_1^\tau$ und $y_2 \in W_2^\tau$ seien so gewählt, daß $\| y_1 - y_2 \| = h_\tau$ gilt. Nach (6) existieren dann weitere Elemente $z_1 \in W_1$ und $z_2 \in W_2$ mit

$$\| z_1 - z_2 \| < h_\tau . \tag{11}$$

Nun kann nicht gleichzeitig $z_1 \in W_1^\tau$ und $z_2 \in W_2^\tau$ sein, da (11) sonst nicht erfüllt wäre. Wir nehmen an, daß $z_1 \notin W_1^\tau$, also $\| z_1 \| > \tau$ gilt. Mit (10) und (11) erhält man

$$h_\sigma \geqslant h_\tau > \| z_1 - z_2 \| \geqslant \| z_1 \| - \| z_2 \| > \tau - \| z_2 \|.$$

Unter Verwendung von (9) folgt $\| z_2 \| > \sigma$. Da auch die Beziehung $\| z_1 \| > \sigma$ besteht, ergibt sich $z_1 \in P_1^\sigma$ und $z_2 \in P_2^\sigma$. Nach (4) gilt damit

$$\| z_1 - z_2 \| \geqslant b_\sigma . \tag{12}$$

Verwendet man nun der Reihe nach (10), (11), (12), (8) und (7), so erhält man $h_\sigma > h_\sigma$. Auf Grund dieses Widerspruches ist Satz 1 bewiesen.

3. Einseitige Approximation und Einschliessung mit Nebenbedingungen

Der Raum R sei von nun an nicht nur linear und normiert sondern auch halbgeordnet. Es sei ein Element $f \in R$ gegeben. Zu einer beliebigen Teilmenge Q von R definieren wir

Definition 2.

$$Q_+(f) := \{r \in Q : r - f \geqslant 0\} \qquad \text{und} \qquad Q_-(f) := \{r \in Q : r - f \leqslant 0\}.$$

Es sei V ein endlichdimensionaler Teilraum von R. Dann sind nach Definition 2 die Mengen $V_+(f)$ und $V_-(f)$ festgelegt. Ferner seien zwei Mengen W_+ und W_- mit $W_+ \subset V_+(f)$ und $W_- \subset V_-(f)$ gegeben. Es lassen sich nun zwei Approximationsprobleme formulieren.

(A) Gesucht ist ein Element $w \in W_+$, so daß für alle $v \in W_+$ $\| w - f \| \leqslant \| v - f \|$ gilt.

(B) Gesucht sind Elemente $w_1 \in W_+$ und $w_2 \in W_-$, so daß für alle $v_1 \in W_+$ und für alle $v_2 \in W_-$ die Ungleichung $\| w_1 - w_2 \| \leqslant \| v_1 - v_2 \|$ gilt.

Da die in der Aufgabenstellung (A) auftretenden Elemente v alle die Ungleichung $v \geqslant f$ erfüllen, handelt es sich dort um ein Problem der einseitigen Approximation von f. Entsprechend hat man in (B) ein Einschließungsproblem vor sich, da $v_1 \geqslant f \geqslant v_2$ für alle $v_1 \in W_+$ und $v_2 \in W_-$ gilt. Die Mengen W_+ und W_- werden im Einzelfall durch Nebenbedingungen charakterisiert.

Satz 2. *Die Mengen W_+ und W_- seien abgeschlossen in R und nichtleer. Außerdem sei $R_+(0)$ abgeschlossen in R. Dann besitzen die Probleme* (A) *und* (B) *Lösungen.*

Beweis. Da $R_+(0)$ abgeschlossen in R ist, sind auch die Mengen $R_+(f)$ und $R_-(f)$ abgeschlossen in R. Außerdem sind diese beiden Mengen Kegel, deren gemeinsamer Scheitel in $f \in R$ liegt. Es gilt $R_+(f) \cap R_-(f) = \{f\}$. Wir setzen nun

$$U := \{r : r = v + \lambda f, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

U ist ein endlichdimensionaler Teilraum von R. Die Mengen $K_1 := R_+(f) \cap U$ und $K_2 := R_-(f) \cap U$ sind abgeschlossene Kegel in U mit gemeinsamem Scheitel in f. Zusätzlich gilt $K_1 \cap K_2 = \{f\}$.

Da W_+ eine abgeschlossene Teilmenge von K_1 und W_- eine abgeschlossene Teilmenge von K_2 ist, folgt die Existenz einer Lösung von Problem (B) aus Satz 1, indem man $W_1 := W_+$ und $W_2 := W_-$ setzt. Die Existenz einer Lösung von (A) ergibt sich entsprechend, wenn man $W_1 := W_+$ und $W_2 := \{f\}$ wählt.

4. Anwendungen der Sätze 1 und 2

4.1

Spezialfälle der Aufgabenstellungen (A) und (B) ergeben sich, wenn man $W_+ := V_+(f)$ und $W_- := V_-(f)$ setzt. Man erhält die Probleme der einseitigen Approximation und der Einschließung von f ohne Nebenbedingungen. Aus Satz 2 folgt

Satz 3. *Die Menge $R_+(0)$ sei abgeschlossen in R. Es mögen Elemente $v_1, v_2 \in V$ existieren, für die $v_1 \geqslant f \geqslant v_2$ gilt. Dann sind die folgenden Aussagen* (a) *und* (b) *erfüllt.*

(a) *Es gibt ein Element $w \in V$ mit $w \geqslant f$, so daß für alle $v \in V$ mit $v \geqslant f$ $\| w - f \| \leqslant \| v - f \|$ gilt.*

(b) *Es gibt Elemente $w_1, w_2 \in V$ mit $w_1 \geqslant f \geqslant w_2$, so daß für alle $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \geqslant f \geqslant v_2$ die Beziehung $\| w_1 - w_2 \| \leqslant \| v_1 - v_2 \|$ gilt.*

Beweis. Die zur Approximation zugelassenen Mengen W_+ und W_- sind abgeschlossen, da

$$W_+ = V_+(f) = V \cap R_+(f) \qquad \text{und} \qquad W_- = V_-(f) = V \cap R_-(f)$$

gilt. Deshalb sind alle Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt.

4.2

Die Aussage von Satz 3 soll nun verallgemeinert werden. Es sei S ein weiterer halbgeordneter linearer normierter Raum über dem Körper der reellen Zahlen. Ein gegebener Operator L bilde R in S ab. L sei von monotoner Art, d.h. daß für $r_1, r_2 \in R$ aus der Beziehung $Lr_1 \geqslant Lr_2$ die Ungleichung $r_1 \geqslant r_2$ folgt (vergl. [1; und 2, S. 296]). Das Element $f \in R$ sei wie früher vorgegeben, und es gelte

$$Lf =: k.$$

Für $h \neq f$, $h \in R$, ergibt sich dann $Lh \neq k$. Ähnlich wie in Definition 2 setzen wir

DEFINITION 3.

$$V_+(L, f) := \{v \in V : Lv \geqslant Lf\} \quad \text{und} \quad V_-(L, f) := \{v \in V : Lv \leqslant Lf\}.$$

Da L von monotoner Art ist, gilt $V_+(L, f) \subset V_+(f)$ und $V_-(L, f) \subset V_-(f)$. Durch Anwendung von Satz 2 erhält man

SATZ 4. *Die Menge $R_+(0)$ sei abgeschlossen in R, ebenso die Menge $S_+(0)$ in S. Es sei L ein stetiger Operator von monotoner Art, der R in S abbildet, und es bestehe die Beziehung $Lf = k$. Die Mengen $V_+(L, f)$ und $V_-(L, f)$ seien nichtleer. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen $(\bar{a})$ und $(\bar{b})$.*

($\bar{a}$) *Es existiert ein Element $w \in V_+(L, f)$, so daß für alle $v \in V_+(L, f)$ $\| w - f \| \leqslant \| v - f \|$ gilt.*

($\bar{b}$) *Es existieren Elemente $w_1 \in V_+(L, f)$ und $w_2 \in V_-(L, f)$, so daß für alle $v_1 \in V_+(L, f)$ und $v_2 \in V_-(L, f)$ die Beziehung $\| w_1 - w_2 \| \leqslant \| v_1 - v_2 \|$ gilt.*

Beweis. Wegen der Stetigkeit von L sind die Urbildmengen $L^{-1}(S_+(k))$ und $L^{-1}(S_-(k))$ abgeschlossen in R. Da

$$V_+(L, f) = V \cap L^{-1}(S_+(k)) \quad \text{und} \quad V_-(L, f) = V \cap L^{-1}(S_-(k))$$

gilt, sind die Mengen $V_+(L, f)$ und $V_-(L, f)$ ebenfalls abgeschlossen in R. Es läßt sich also wieder Satz 2 anwenden, und damit ist Satz 4 bewiesen.

Ist L linear und von monotoner Art, so sind in Satz 4 die Voraussetzungen, daß L stetig und $R_+(0)$ abgeschlossen ist, überflüssig. Setzt man nämlich $U := \{r : r = v + \lambda f, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}\}$, so ist die Einschränkung $L_0 := L \mid U$ stetig. Die Mengen $L_0^{-1}(S_+(k))$ und $L_0^{-1}(S_-(k))$ sind dann abgeschlossene Kegel in U mit gemeinsamem Scheitel in f, deren Durchschnitt nur das Element f enthält. Wie im Beweis von Satz 4 ergibt sich, daß $V_+(L, f)$ und $V_-(L, f)$ abgeschlossene Teilmengen von V sind. Damit läßt sich Satz 1 anwenden, da $V_+(L, f) \subset L_0^{-1}(S_+(k))$ und $V_-(L, f) \subset L_0^{-1}(S_-(k))$ gilt.

4.3

Die folgende Problemstellung wird in [4] näher untersucht. Es seien Elemente f, $g \in R$ gegeben. f soll bezüglich $V_+(f) \cap V_+(g)$ approximiert werden. (Ist R nicht nur ein halbgeordneter linearer normierter Raum über $\mathbb{R}$ sondern zusätzlich ein Verband, so kann man noch voraussetzen, daß $f \leqslant g$ gilt, ohne daß dadurch an der Allgemeinheit des Problems etwas geändert wird. In diesem Fall ergibt sich außerdem $V_+(f) \cap V_+(g) = V_+(g)$.)

SATZ 5. *Die Menge $R_+(0)$ sei abgeschlossen in R, und $V_+(f) \cap V_+(g)$ sei nichtleer. Dann existiert ein Element $w \in V_+(f) \cap V_+(g)$, so daß für alle $v \in V_+(f) \cap V_+(g)$ die Beziehung $\| w - f \| \leqslant \| v - f \|$ gilt.*

Beweis. Wir setzen wieder $U := \{r : r = v + \lambda f, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Da $V_+(f) \cap V_+(g)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $U_+(f)$ und $\{f\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $U_-(f)$ ist, läßt sich, wie im Beweis von Satz 2, Satz 1 anwenden.

5. Ergänzungen und Beispiele

Es wird nun der Raum $C(B)$ der auf einem kompakten topologischen Raum B stetigen und reellwertigen Funktionen betrachtet. Für $h \in C(B)$ sei

$$\| h \| := \max\{| h(x)| : x \in B\},$$

und für $h_1, h_2 \in C(B)$ gelte $h_1 \leqslant h_2$ genau dann, wenn $h_1(x) \leqslant h_2(x)$ für alle $x \in B$ erfüllt ist. Die Teilmenge $C(B)_+(0) = \{h : h \in C(B),\ h(x) \geqslant 0 \text{ für alle } x \in B\}$ ist dann abgeschlossen in $C(B)$. Die in den Sätzen 3 und 5 genannten Approximationsprobleme lassen sich also im Raum $C(B)$ lösen, wenn die zur Approximation zugelassenen Funktionenmengen nichtleer sind. Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn der Teilraum V die Haarsche Bedingung erfüllt.

Es sollen noch zwei Beispiele angegeben werden, in denen keine beste Approximation und keine beste Einschließung existieren.

(α) Es sei $B := [-1, +1]$, und $V \subset C(B)$ sei durch $V := \{v : v(x) = ax, a \in \mathbb{R}\}$ definiert. Die Funktion $f \in C(B)$ sei durch $f(x) := x^3$, $x \in B$, festgelegt. Die Mengen $V_+(f)$ und $V_-(f)$ sind in diesem Fall leer.

(β) Es sei $B := [0, 1]$. Der Operator L sei für $h \in C(B)$ durch $Lh(x) := h(x) - \int_0^x h(\xi)\, d\xi$ für $x \in [0, 1]$ erklärt. L bildet $C(B)$ in $C(B)$ ab und ist von monotoner Art. Setzt man $k(x) := 1$ und $f(x) := e^x$ für $x \in [0, 1]$, so gilt $Lf = k$. Außerdem sei $V := \{v : v(x) = c, c \in \mathbb{R}\}$. Ist nun $v_1 \in V$ durch $v_1(x) = c_1$, $x \in B$, gegeben, so erhält man $Lv_1(x) = c_1 - c_1 x$. Nun existiert aber keine reelle Zahl c_1, so daß für alle $x \in [0, 1]$ die Ungleichung $c_1 - c_1 x \geqslant k(x)$ erfüllt ist. Daraus folgt, daß die in Satz 4 genannte Menge $V_+(L, f)$ leer ist.

Diese Arbeit ist der erste Teil der Dissertation, die der Verfasser unter Anleitung von Prof. Dr. G. Meinardus am Istitut für Angewandte Mathematik I der Universität Erlangen-Nürnberg angefertigt hat.

LITERATUR

1. L. COLLATZ, Aufgaben monotoner Art, *Arch. Math.* **3** (1952), 366–376.
2. L. COLLATZ, "Funktionalanalysis und numerische Mathematik," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1968.
3. G. KÖTHE, "Topologische lineare Räume. I," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1966.
4. W. SIPPEL, Zur Charakterisierung bester einseitiger Approximationen und bester Einschließungen von stetigen Funktionen, erscheint demnächst.